

# Vorlesung

# Hochleistungsmikrowellentechnik

*Prof. Dr.-Ing. John Jelonnek*

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik (IHM)

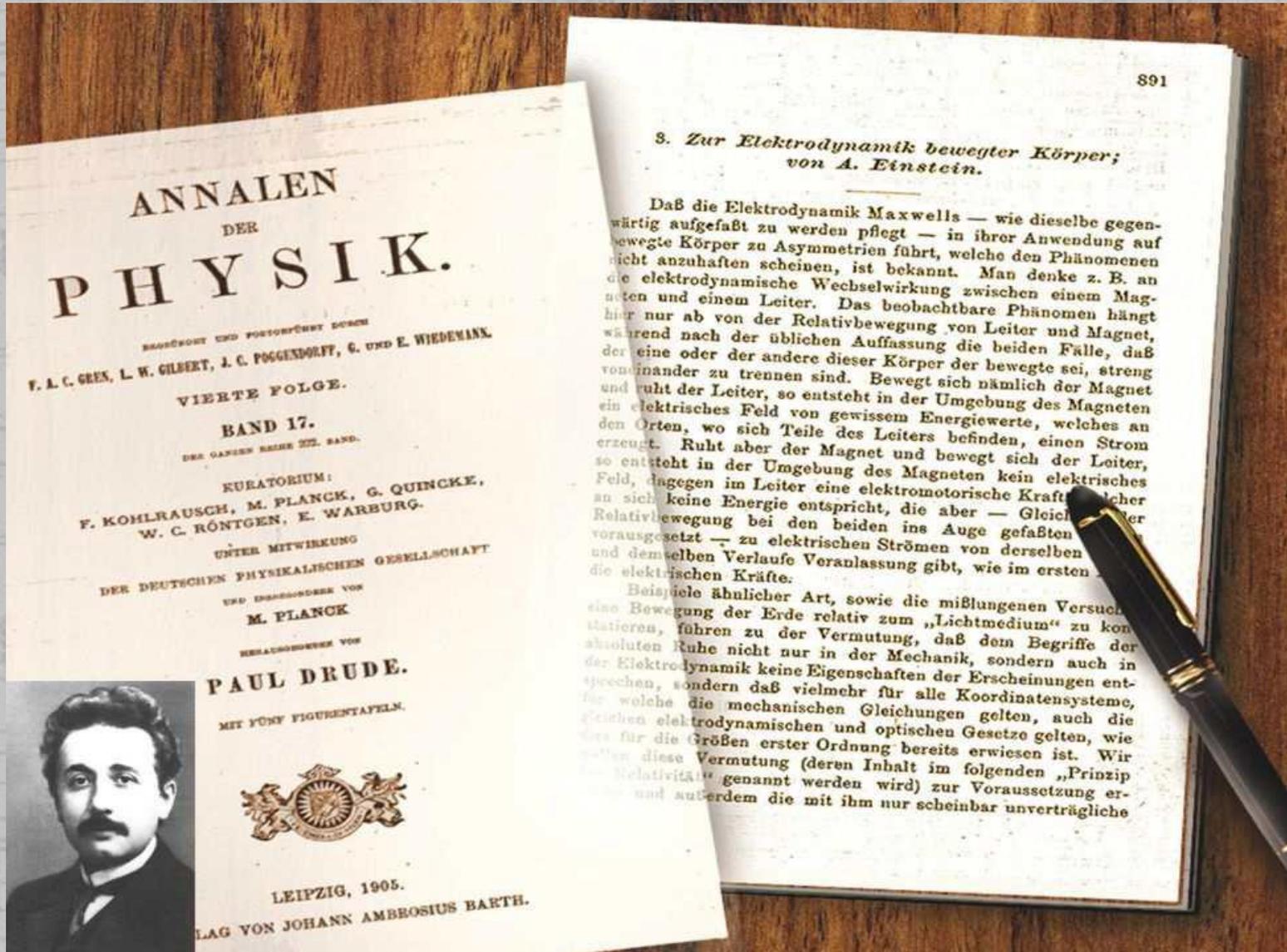


## Kapitel 1.4

## Abschnitt 1.4

# RELATIVISTISCHE KORREKTUR UND DAS VERHALTEN EINER ELEKTRISCHEN LADUNG UNTER DEM EINFLUSS EINES ELEKTROMAGNETISCHEN FELD

# A. Einstein 1905: „Spezielle Relativitätstheorie“



# Postulat der speziellen Relativitätstheorie



**Einsteins Postulate:**

**Zeitdilatation:** Bewegte Uhren gehen langsamer

**Längenkontraktion:** Bewegte Objekte schrumpfen

Die **spezielle Relativitätstheorie** ist eine Theorie über **Raum** und **Zeit**.

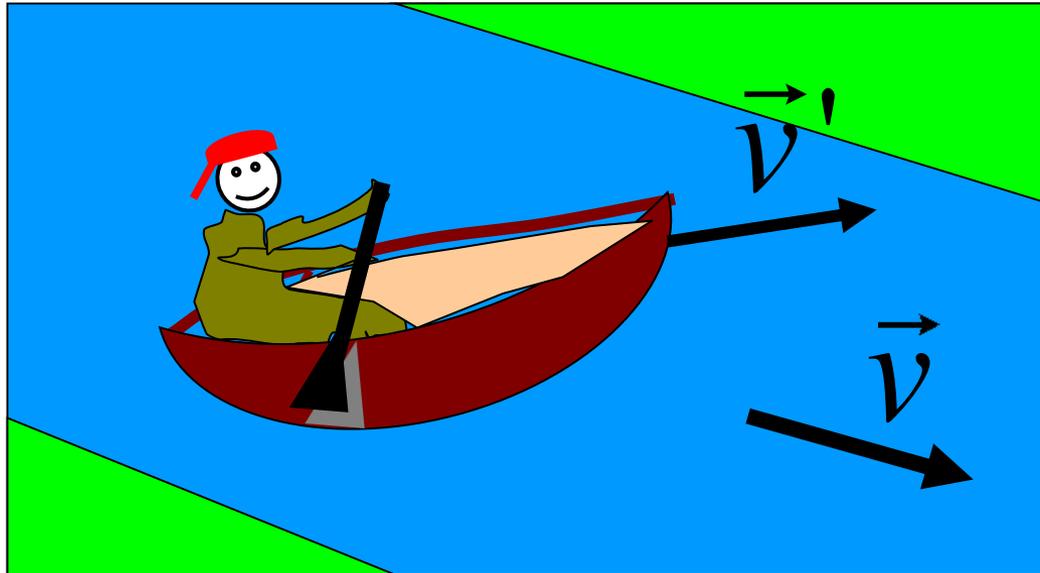
Sie verallgemeinert das Relativitätsprinzip von Galileo der klassischen Mechanik auf alle Gesetze der Physik.

**Das verallgemeinerte Prinzip besagt, dass in allen Inertialsystemen die gleichen physikalischen Gesetze gelten.** Das betrifft die Elektrodynamik, die Kinematik und die Dynamik aller Körper.

Die Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie ist nicht auf die gleichförmige Bewegung beschränkt.

# Die „Klassische“ Galileo-Transformation

Mit freundlicher  
Genehmigung  
**M. Petelin**,  
IAP Nzhizny-  
Novgorod, Russia



This simplified pedagogical version of introduction to the relativistic theory [1, 2] was presented as a poster [3] at the 4<sup>th</sup> International Workshop on Far-Infrared Technologies, Fukui, 2012, and as a talk for hearers of Summer Physics School for advanced children of Nizhny Novgorod, 2012.

[1] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, ISBN 0-8053- 9045- 6, 2006.

[2] W. Pauli, Theory of Relativity, Dover Publications, 1981.

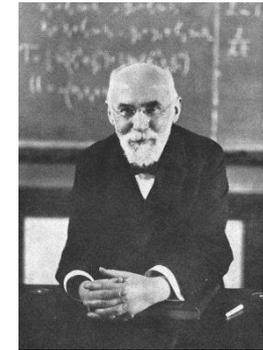
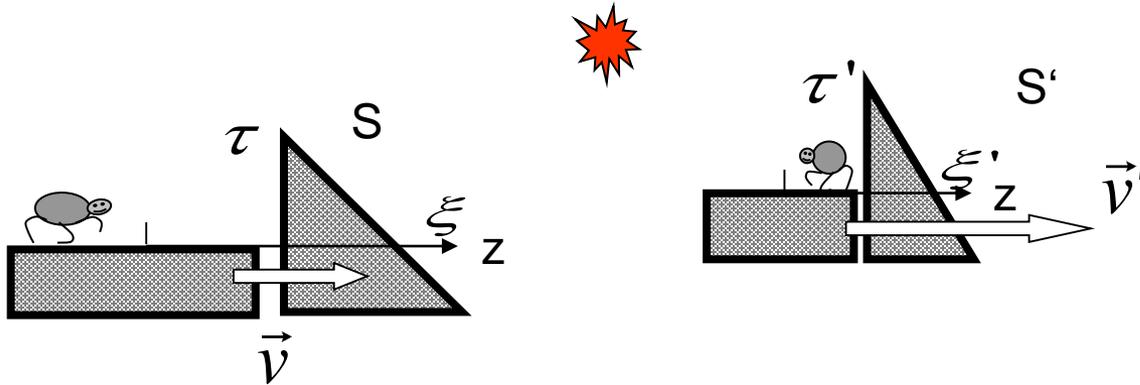
[3] M. Petelin, A Compact Derivation of the Relativistic Time-Coordinate Transform, Proceedings of IW-FIRT 2012, Fukui, Japan, P-1.

unter der Annahme:

$|v| \ll c$ ,  $|\vec{v}'| \ll c$  mit  $c$ : Lichtgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{\text{gesamt}} = \vec{v} + \vec{v}', \quad t' = t, \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

# Der Ansatz für die Lorentz-Transformation



H. Anton Lorentz  
(1853-1928)

**Ansatz:** Ein gestrichenes System  $S'$  bewege sich bzgl. eines Bezugssystems  $S$  mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in positive  $+z$  - Richtung

Zusätzlich setzen wir an:

- Länge  $x$  in Meter,
- Zeit  $t$  in Sekunden,
- $c$  (m/s) als die **maximale Geschwindigkeit** (Lichtgeschwindigkeit)

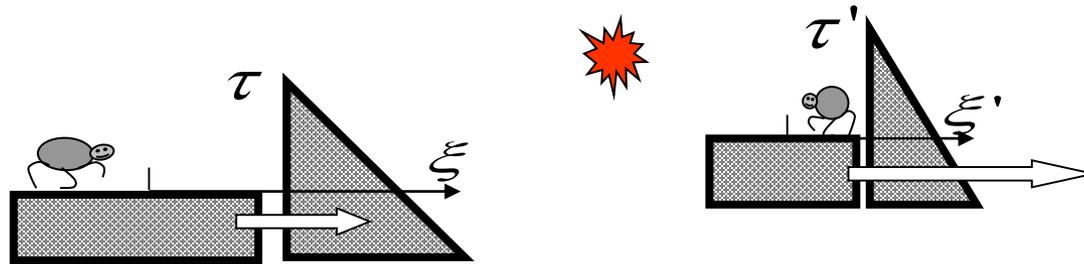
$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

und definieren:

$$\xi := \alpha x \quad \tau := \alpha ct$$

$$\alpha := 1 \text{ m}^{-1} : \text{Normierungsfaktor}$$

# Die Symmetrie von Raum und Zeit



Wir setzen an:

$$\xi = \gamma \xi' + \kappa \tau'$$

$$\tau = \mu \xi' + \rho \tau'$$

Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \xi \\ ct \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \kappa \\ \kappa & \rho \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ ct' \end{pmatrix}$$

$$\xi \rightarrow \tau$$

$$\tau \rightarrow \xi$$



$$\xi' \rightarrow \tau'$$

$$\tau' \rightarrow \xi'$$

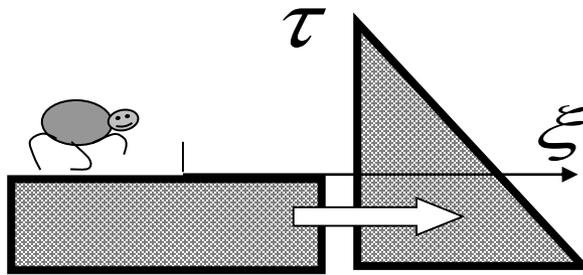
Die Transformation ist **invariant** gegenüber einer Vertauschung von Ort und Zeit



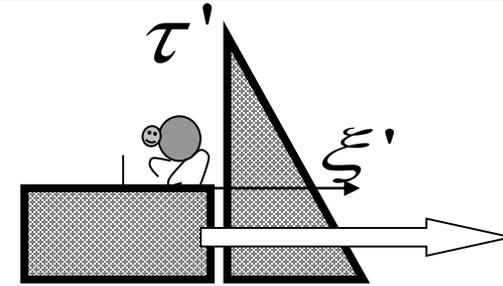
$$\xi = \gamma \xi' + \kappa \tau'$$

$$\tau = \kappa \xi' + \gamma \tau'$$

# Die Äquivalenz der Referenzebenen

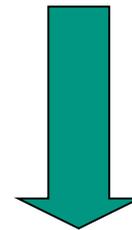


$$\begin{aligned} \xi &= \gamma \xi' + \kappa \tau' \\ \tau &= \mu \xi' + \rho \tau' \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \xi' &= \gamma' \xi + \kappa' \tau \\ \tau' &= \mu' \xi + \rho' \tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi' &\rightarrow -\xi \\ \xi &\rightarrow -\xi' \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \tau' & \text{Ansatz:} \\ \tau' &\rightarrow \tau & \text{Umkehr der} \\ & & \text{Referenzebene} \end{aligned}$$

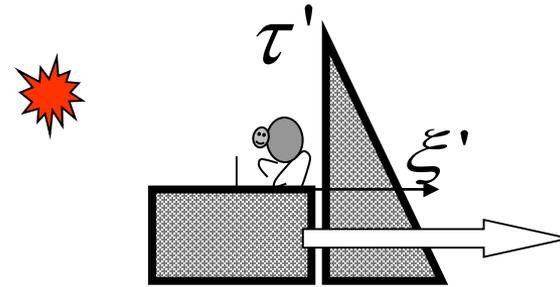
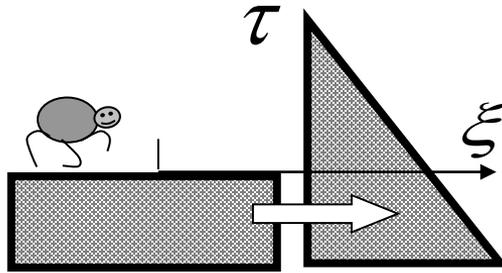
Äquivalenz:

$$\begin{aligned} \xi &= \gamma \xi' + \kappa \tau' \\ \tau &= \kappa \xi' + \gamma \tau' \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \xi' &= \gamma \xi - \kappa \tau \\ \tau' &= -\kappa \xi + \gamma \tau \end{aligned}$$

# Die Definition der relativen Geschwindigkeit



$$\xi = \gamma \xi' + \kappa \tau'$$

$$\tau = \kappa \xi' + \gamma \tau'$$

$$\xi' = \gamma \xi - \kappa \tau$$

$$\tau' = -\kappa \xi + \gamma \tau$$

Ansatz:

$$\xi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\kappa}{\gamma} \tau$$

$$\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi' = -\frac{\kappa}{\gamma} \tau'$$

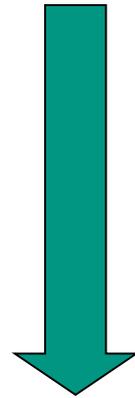
Es ergibt sich die Definition für die relative Geschwindigkeit:

$$\beta = \frac{\kappa}{\gamma}$$

# Die Transformation ist zyklisch

$$\begin{array}{l}
 \xi = \gamma \xi' + \kappa \tau' \\
 \tau = \kappa \xi' + \gamma \tau'
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{l}
 \xi' = \gamma \xi - \kappa \tau \\
 \tau' = -\kappa \xi + \gamma \tau
 \end{array}$$

$$\det \begin{bmatrix} \gamma & \kappa \\ \kappa & \gamma \end{bmatrix} \equiv \gamma^2 - \kappa^2 = 1$$



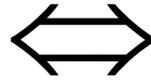
Es ergibt sich, dass die Transformationsmatrix unitär ist.

$$\gamma^2 - \kappa^2 = 1$$

# Die Lorentz-Transformation

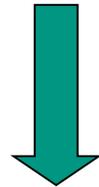
$$\xi = \gamma \xi' + \kappa \tau'$$

$$\tau = \kappa \xi' + \gamma \tau'$$



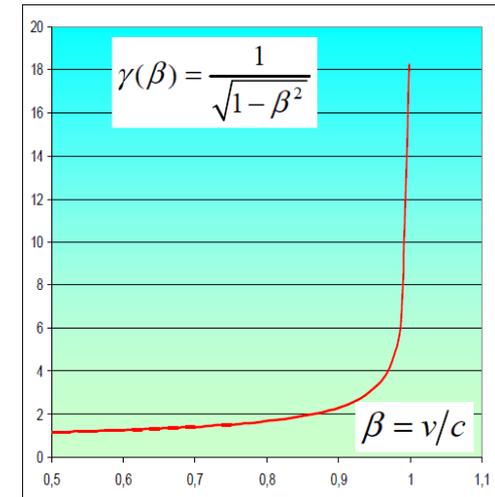
$$\xi' = \gamma \xi - \kappa \tau$$

$$\tau' = -\kappa \xi + \gamma \tau$$



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\kappa = \beta \gamma.$$

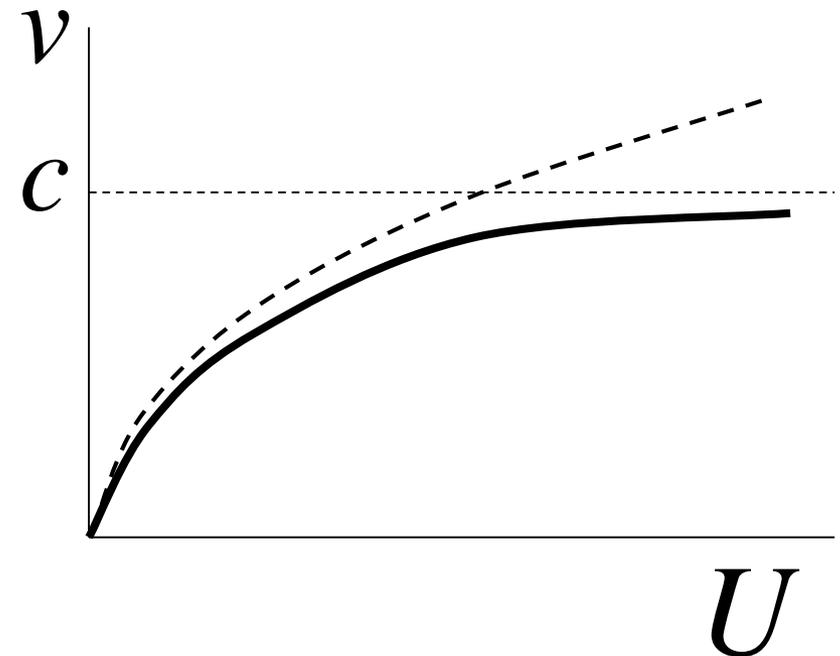
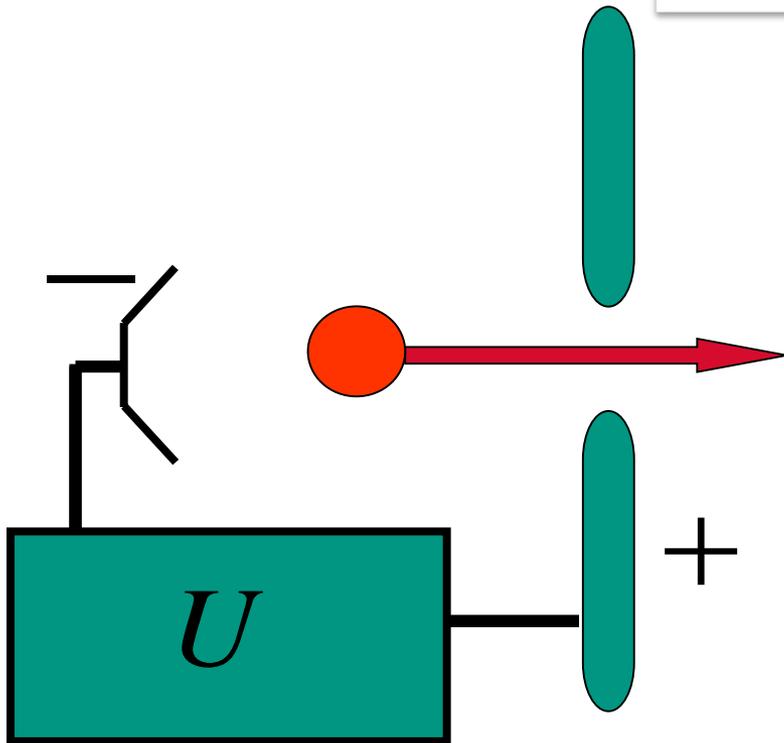


Damit muss die relative Geschwindigkeit immer kleiner oder gleich 1 sein.

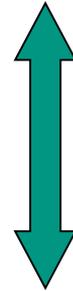
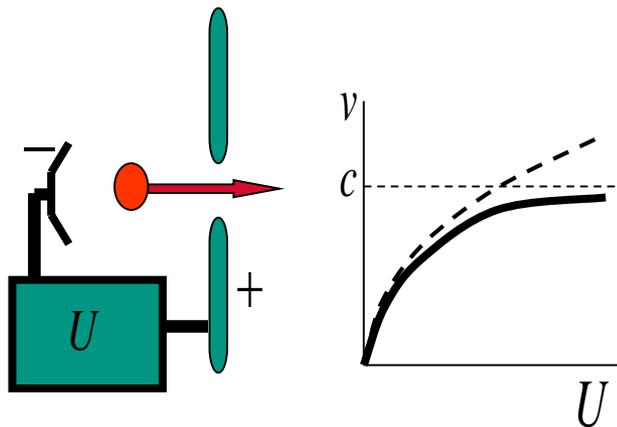
$$\beta \leq 1$$

# Die Geschwindigkeit von bewegten Körpern/Teilchen ist begrenzt

- Mit zunehmender Beschleunigungsspannung nähert sich die Geschwindigkeit der Elektronen der Licht-geschwindigkeit an.
- Die Energie / die relativistische Masse geht gegen unendlich.



# C: Lichtgeschwindigkeit



Materie erreicht Lichtgeschwindigkeit

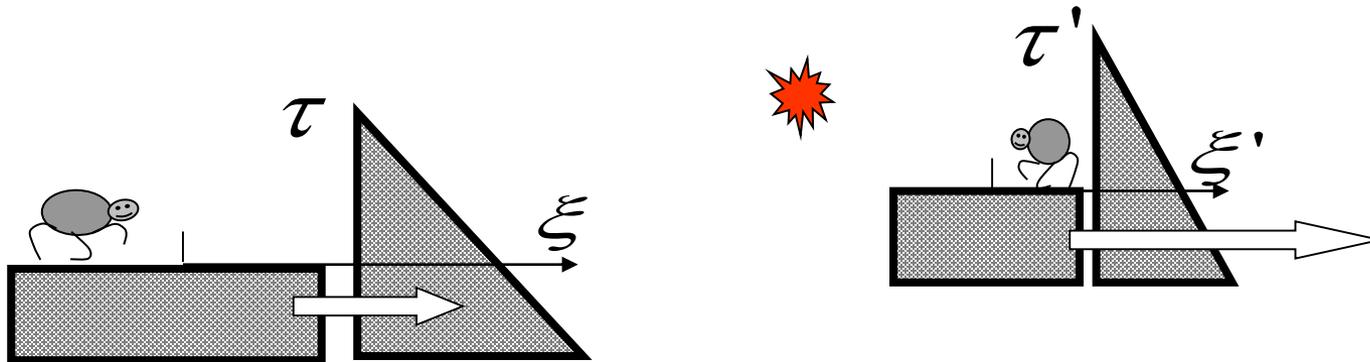


→ die Energie der Materie wird unendlich

## Albert Einstein

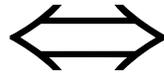
$$W = mc^2 \quad m = m_0 \gamma \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

# Transformation ins gauss'sche System



$$x = \gamma x' + \kappa ct'$$

$$ct = \kappa x' + \gamma ct'$$



$$x' = \gamma x - \kappa ct$$

$$ct' = -\kappa x + \gamma ct$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\kappa = \beta \gamma$$

$$\beta = v_{rel} / c$$

...  
**Ansatz:** Das Objekt bewegt sich in +z-Richtung

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$\begin{aligned} z &= \gamma (z' + vt') \\ t &= \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} z' \right) \end{aligned}$$

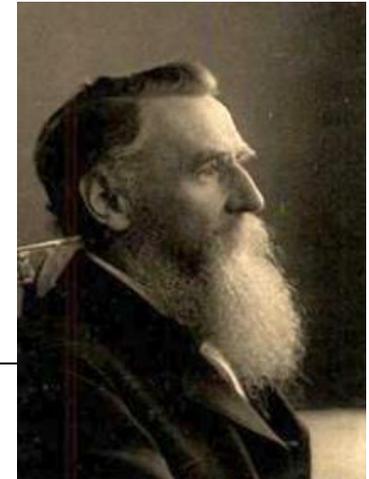
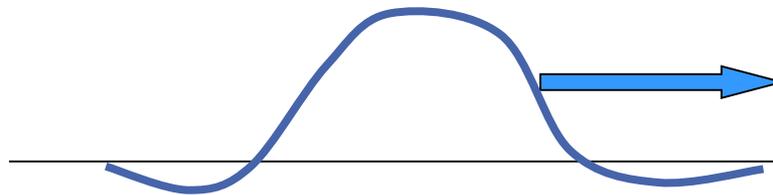
$$\begin{aligned} z' &= \gamma (z - vt) \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} z \right) \end{aligned}$$

$$\gamma = (1 - v^2 / c^2)^{-1/2}$$

# Invarianz eines Wellenpakets

**Woldemar Voigt (1850 – 1919)**

**Ein Wellenpaket**



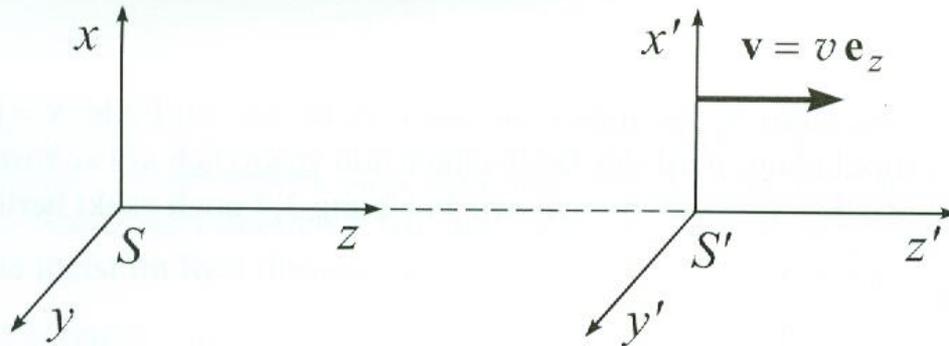
**ist invariant gegenüber seiner Referenzebene**

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau'^2}$$

$$\tau = ct \quad \tau' = ct'$$

**C: Lichtgeschwindigkeit**

# Lorentz-Transformation (tabellarische Auflistung)



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Bewegtes System $S'$		Ruhsystem $S$	
$x' = x$	$\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}$	$x = x'$	$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}'_{\perp}$
$y' = y$		$y = y'$	
$z' = \gamma(z - vt)$	$\mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t)$	$z = \gamma(z' + vt')$	$\mathbf{r}_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{v}t')$
$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c_0}z\right) = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c_0^2}\right)$		$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c_0}z'\right) = \gamma\left(t' + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'}{c_0^2}\right)$	

Quelle: K. Kark, Antennen und Strahlungsfelder

# Lorentz-Transformation der Feldgrößen

## Gedankenexperiment:

- Ein Beobachter, der eine (relativ zu ihm nicht bewegte) Ladung beobachtet, wird ein elektrisches Feld messen, jedoch aufgrund des fehlenden Stromflusses kein magnetisches Feld
- Bewegt sich der Beobachter hingegen auf die Ladung zu- oder von ihr weg, so wird er einerseits bemerken, dass sich aufgrund der Bewegung das elektrische Feld verändert. Das bedeutet, dass der Beobachter bei gleicher Entfernung von der Ladung, aber anderer Relativgeschwindigkeit zur Ladung ein unterschiedliches E-Feld misst. Andererseits interpretiert der Beobachter die Ladung aber auch als einen Strom, der sich von ihm fort oder auf ihn zubewegt. Der Beobachter wird also zusätzlich zum elektrischen Feld ein magnetisches Feld erkennen.

Elektrische Felder	Magnetische Felder
$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}'_{\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}$	$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}$
$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp})$ $\mathbf{D}'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{D}_{\perp} + \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\perp} \right)$	$\mathbf{H}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}_{\perp})$ $\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} \right)$

Quelle: K. Kark, Antennen und Strahlungsfelder

# Die inverse Lorentztransformation der Feldgrößen

Elektrische Felder	Magnetische Felder
$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_{\parallel} = \mathbf{D}'_{\parallel}$	$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}'_{\parallel}$
$\mathbf{E}_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_{\perp})$	$\mathbf{H}_{\perp} = \gamma (\mathbf{H}'_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{D}'_{\perp})$
$\mathbf{D}_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{D}'_{\perp} - \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H}'_{\perp} \right)$	$\mathbf{B}_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{B}'_{\perp} + \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}'_{\perp} \right)$

**Herleitung:**  
Umkehrung der Geschwindigkeitsrichtung und Austauschen der gestrichelten durch die ungestrichelten Größen.

Quelle: K. Kark, Antennen und Strahlungsfelder

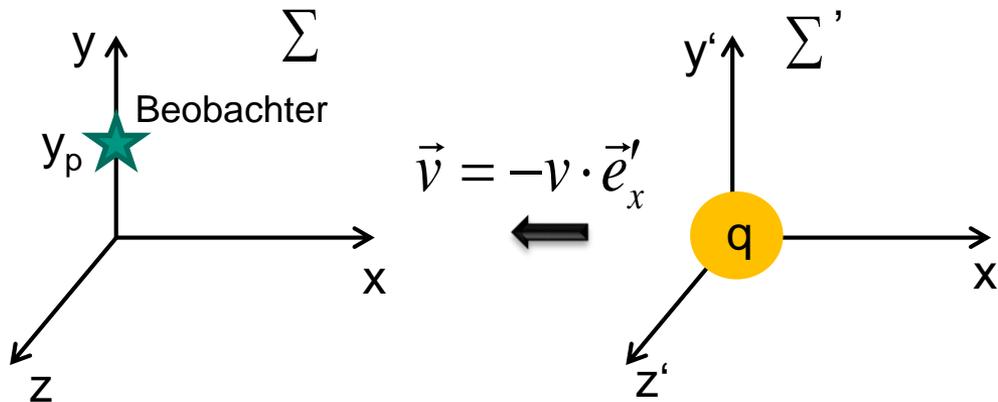
## Es folgt: $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ existieren nicht unabhängig voneinander.

Ein Feld, das in einem System rein elektrostatisch oder rein magnetostatisch ist, erscheint im anderen System als eine Mischung aus beiden.

Die elektrischen und magnetischen Felder sind miteinander verknüpft, so dass man nicht von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  getrennt, sondern vom elektromagnetischen Feld als Ganzem sprechen muss.

Das magnetische Feld ist eine notwendige Konsequenz der Lorentz-Transformation des Coulombfeldes einer Punktladung. In diesem Sinne ist das Magnetfeld ein relativistischer Effekt.

# Felder einer bewegten Punktladung



Die Ladung  $q$  befindet sich im Ursprung ihres Ruhesystems  $S'$ ;

$S$  ist so gedreht, dass sich der Beobachter auf der  $y$ -Achse befindet und  $S'$ , beziehungsweise die Ladung, sich in  $x$ -Richtung bewegt;

zum Zeitpunkt  $t = t_0 = 0$  fielen die Koordinatenursprünge zusammen.

Die Position des Betrachters ist so in  $\Sigma$ :  $\vec{r}_p = (0, y_p, 0)$  und in  $\Sigma'$ :  $\vec{r}'_p = (-vt', y_p, 0)$ .

Wir benötigen außerdem den Betrag  $r'_p$ , den man als Abstand zwischen Beobachter und Ladung interpretieren kann. Er ist in  $\Sigma'$ :  $r'_p = \sqrt{(-vt')^2 + y_p^2} = \sqrt{v^2 t'^2 + y_p^2}$ . In  $\Sigma$ -Koordinaten lässt er sich wegen  $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2} x_p) = \gamma t$  folgendermaßen schreiben:  $r'_p = \sqrt{v^2 \gamma^2 t^2 + y_p^2}$ .

Im Inertialsystem  $\Sigma'$  induziert nun die dort ruhende Ladung  $q$  die bekannten Felder

$$\vec{B}' = 0 \text{ und } \vec{E}'(\vec{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}'}{r'^3}$$

Setzt man hier die Position des Beobachters  $\vec{r}'_p$  ein (sie ist zeitabhängig, da der Beobachter sich in  $\Sigma'$  bewegt), so erhält man für die Feldstärken an seinem jeweiligen Aufenthaltsort

$$\vec{B}' = 0 \text{ und } \vec{E}'(t') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}'_p}{r_p'^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p'^3} \begin{pmatrix} -vt' \\ y_p \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quelle: Internet, Sarah Stubenvoll

# Feldstärken an einer festen Position

Mit den Transformationsformeln lassen sich nun die Feldstärken im Bezugssystem  $\Sigma$  berechnen. Wir benutzen die Darstellung von  $r'_p$  in  $\Sigma$ -Koordinaten und  $t' = \gamma t$ . Dies gilt, da es sich nach wie vor um die Zeit am Ort des Beobachters handelt. Außerdem bewegt sich  $\Sigma$  relativ zu  $\Sigma'$  mit der Geschwindigkeit  $-v$ , weswegen der

Koeffizient  $\frac{-v}{c} = -\frac{v}{c} = -\beta$  ist. Es ergibt sich:

$$E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-\gamma vt}{(\gamma^2 v^2 t^2 + y_p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = (\gamma E'_y - \beta c B'_z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\gamma y_p}{(\gamma^2 v^2 t^2 + y_p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = (\gamma E'_z + \beta c B'_y) = 0$$

$$B_x = B'_x = 0$$

$$B_y = \gamma(B'_y + \frac{\beta}{c} E'_z) = 0$$

$$B_z = \gamma(B'_z - \frac{\beta}{c} E'_y) = -\gamma(\frac{\beta}{c} E'_y) = -\frac{\beta}{c} E_y$$

Der Beobachter erfährt ein magnetisches Feld!

Anschaulich bedeuten die Formeln, dass die transversale Komponente des Feldes ( $E_y$ ) nur während einer sehr kurzen Zeit, nämlich gerade wenn die Ladung am Beobachter vorbei fliegt, merklich von Null verschieden ist. Je mehr sich die Geschwindigkeit  $v$  der Lichtgeschwindigkeit annähert, desto kleiner wird dies Intervall. Die longitudinale Komponente ( $E_x$ ) dagegen nimmt kurz bevor das Elektron auf der Höhe des Beobachters ist und kurz danach den größten bzw. kleinsten Wert an. Auf Höhe des Beobachters ist sie Null, und ist das Elektron sehr weit entfernt verschwindet sie ebenfalls.

Das Magnetfeld zeigt in Richtung der negativen  $z$ -Achse und seine Zeitabhängigkeit entspricht der der transversalen Komponente des E-Feldes, da die beiden Formeln proportional sind.

# Felder zu einem bestimmten Zeitpunkt

Nun betrachten wir die Feldstärken zu einem festen Zeitpunkt  $t_0$  und untersuchen deren Abhängigkeit vom Ort.

Um die Formeln am Ende gut interpretieren zu können, betrachten wir den Zeitpunkt  $t_0$  als den Moment, in dem die Koordinatenursprünge zusammenfallen. (Also  $t_0 = 0$ .) So befindet sich die Ladung zum betrachteten Zeitpunkt nicht nur im Ursprung von  $\Sigma'$ , sondern auch in dem des ruhenden Bezugssystems  $\Sigma$ , in welchem der Ort des Beobachters angegeben wird und die Ladung sich bewegt. Es besteht dann außerdem zum Zeitpunkt  $t_0$  eine sehr einfache Beziehung zwischen den Ortsvektoren in den beiden Bezugssystemen. Nämlich  $r'_x = \gamma(r_x - \beta ct_0) = \gamma r_x$ ,  $r'_y = r_y$  und  $r'_z = r_z$ .

In  $\Sigma'$  betrachtet ergeben sich wieder die Felder

$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}'}{r'^3} \text{ und } \vec{B}' = 0$$

Transformiert und in Abhängigkeit von  $\vec{r}$  dargestellt erhalten wir

$$E_x(\vec{r}) = E'_x(\vec{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\gamma r_x}{r'^3}$$

$$E_y(\vec{r}) = \gamma E'_y(\vec{r}') = \gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_y}{r'^3}$$

$$E_z(\vec{r}) = \gamma E'_z(\vec{r}') = \gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_z}{r'^3}$$

Zusammengefasst gilt also:  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r'^3}$

$r'$  lässt sich noch in Abhängigkeit von  $r$  und dem Winkel  $\phi$  zwischen  $\vec{r}'$  und der x-Achse darstellen:

Der Abstand zwischen dem Ort  $\vec{r}$  und der x-Achse ist  $\sqrt{r_y^2 + r_z^2}$ . Also gilt  $\sqrt{r_y^2 + r_z^2} = r \sin \phi$  und  $r_y^2 + r_z^2 = r^2 \sin^2 \phi$ . Außerdem ist  $r_x = r \cos \phi$ . Wir erhalten

$$r' = (r_x'^2 + r_y'^2 + r_z'^2)^{\frac{1}{2}} = (\gamma^2 r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{1}{2}} = (\gamma^2 r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} = r (\gamma^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} = r \gamma (1 - \beta^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}$$

und damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3 \gamma^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2}$$

Man kann sich die Feldlinien einer bewegten Punktladung wie die die einer ruhenden Ladung vorstellen, die in x-Richtung (=Bewegungsrichtung) um einen bestimmten Faktor gestaucht sind.

Für das Magnetfeld gilt:

$$\begin{aligned} B_x &= B'_x = 0 \\ B_y &= \gamma \left( B'_y + \frac{\beta}{c} E'_z \right) = \gamma \frac{\beta}{c} E'_z = \frac{\beta}{c} E_z = -\frac{1}{c^2} v_x E_z \\ B_z &= \gamma \left( B'_z - \frac{\beta}{c} E'_y \right) = -\gamma \frac{\beta}{c} E'_y = -\frac{\beta}{c} E_y = \frac{1}{c^2} v_x E_y \end{aligned}$$

Die bedeutet  $\vec{B} = \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E})$ .

Die Feldlinien des Magnetfeldes stehen also senkrecht auf denen des E-Feldes und der Bewegungsrichtung der Ladung. Betrachtet man die Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung, so beschreiben die magnetischen Feldlinien dort Kreise um die Bewegungsachse der Ladung.

# Zusammenhang: Energie, Impuls und Kraft

$W = \gamma m_0 c^2$  : Energie eines Teilchens der Masse  $m > 0$

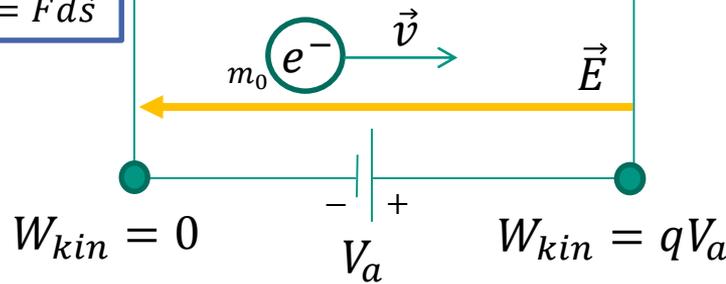
$\vec{P} = \gamma m_0 \vec{v}$  : Impuls

$\frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2}$  : Ableitung der Energie nach der Zeit

$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$  : Die Kraft ist die Ableitung des Impuls  
nach der Zeit  $t$

mit  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ;  $\beta = \vec{v}/c$

$$dW = \vec{F} d\vec{s}$$



$$\vec{F} = \frac{d(\gamma m_0 \vec{v})}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0 \left(1 + \frac{V_a}{V_n}\right); \quad V_n = \frac{m_0 c^2}{e} = 511 \text{ kV}$$

$$\vec{v} = c \underbrace{\sqrt{\frac{2V_a}{V_n}}}_{\text{„klassische“ Formel}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{1 + \frac{V_a}{2V_n}}}{1 + \frac{V_a}{V_n}}}_{\text{relativistische Korrektur}}$$

$$\frac{q}{m_0} : 1.759 \cdot 10^{11} \frac{\text{As}}{\text{kg}}$$

$$c : 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$U_a$ [kV]	10	50	100
$\gamma$	1.02	1.1	1.2
$v/c$	0.2	0.4	0.55

Es gilt:

- $V_a$  ist die Beschleunigungsspannung
- $V_n$  ist die Spannung, die man benötigt, um die relativistische Masse der Elektronen bzgl. derer Ruhemasse zu verdoppeln

- **Die kinetische Energie der Elektronen kann nur mit Hilfe des elektrischen Feldes  $E$  verändert werden**, nicht aber mit dem magnetischen Feld  $\vec{B}$ , da die durch  $\vec{B}$  erzeugte Kraft  $\vec{F}_L$  tangential zu  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  verläuft.

$$\vec{F}_L = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$dW_{kin} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = \underline{\underline{-e\vec{E} \cdot \vec{v} \cdot dt}}$$

ds: Wegstück entlang der Trajektorie des Elektrons

# Die gekoppelten differentiellen Gleichungen in kartesischen und Zylinderkoordinaten

Kartesische Koordinaten:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{x}) = \dot{\gamma} m \dot{x} + \gamma m \ddot{x} = q(E_x + \dot{y} B_z - \dot{z} B_y),$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{y}) = \dot{\gamma} m \dot{y} + \gamma m \ddot{y} = q(E_y + \dot{z} B_x - \dot{x} B_z),$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{z}) = \dot{\gamma} m \dot{z} + \gamma m \ddot{z} = q(E_z + \dot{x} B_y - \dot{y} B_x),$$

Zylindrische Koordinaten:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) - \gamma m r \dot{\theta}^2 = q(E_r + r \dot{\theta} B_z - \dot{z} B_\theta),$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(\gamma m r^2 \dot{\theta}) = q(E_\theta + \dot{z} B_r - \dot{r} B_z),$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{z}) = q(E_z + \dot{r} B_\theta - r \dot{\theta} B_r).$$

Quelle: M. Reiser, Theory and Design of Charged Particle Beams, Wiley-VCH, 2008

# Elektronenoptik

Die Berechnung des Einflusses elektrischer und magnetischer Felder auf Ströme im Vakuum wird oft als **Elektronenoptik** bezeichnet.

Der Lorentzkraftgleichung  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  kommt hier zentrale Bedeutung zu.

Der Begriff "Elektronenoptik" wurde in den 1920er Jahren von Hans Busch wegen der Analogie zwischen der Wirkung optischer Medien auf einen Lichtstrahl und Wirkung der elektromagnetischer Felder auf geladene Teilchen eingeführt:

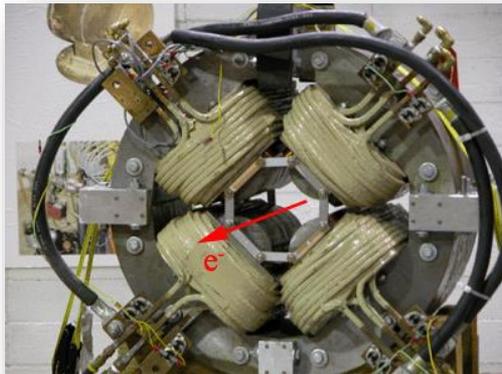
Elektronenoptik		Optik
Elektron		Photon
Elektrischer Strom		Lichtstrahl
Zu $\vec{v}$ parallele („axiale“) Felder: zylindersymmetrisch $\rightarrow$ B oder E		Dielektrische Linsen
Zu $\vec{v}$ senkrechte (transversale) Felder	B - Quadrupolfelder	
	E mit parallelen Feldlinien	Dielektrische Prismen

Analog wurde auch die Ionenoptik definiert, welche nicht auf Elektronen beschränkt ist.

# Elektronenoptik

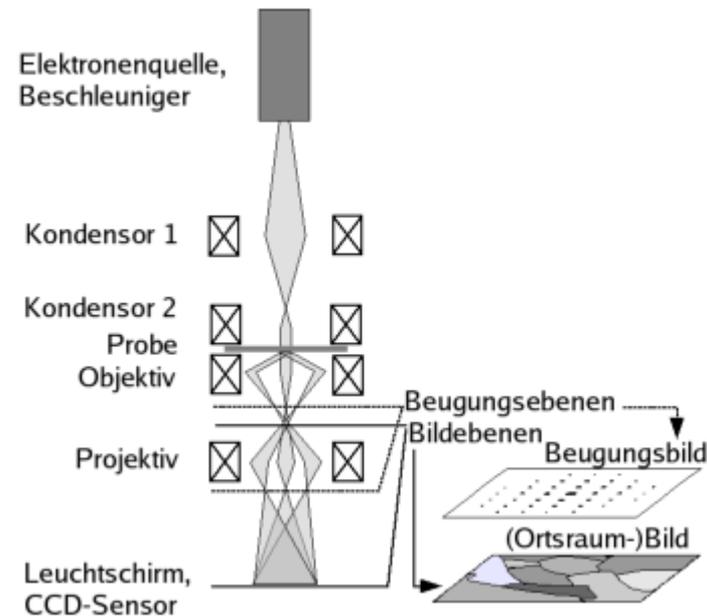
## Wichtige Anwendungsgebiete:

- Magnetisches Mikroskop (1930er) → **Elektronenmikroskop**
- Bildröhren
- Elektronenstrahlschweißen
- Hochleistungsvakuumröhren
- astronomische Phänomene
- Teilchenbeschleuniger

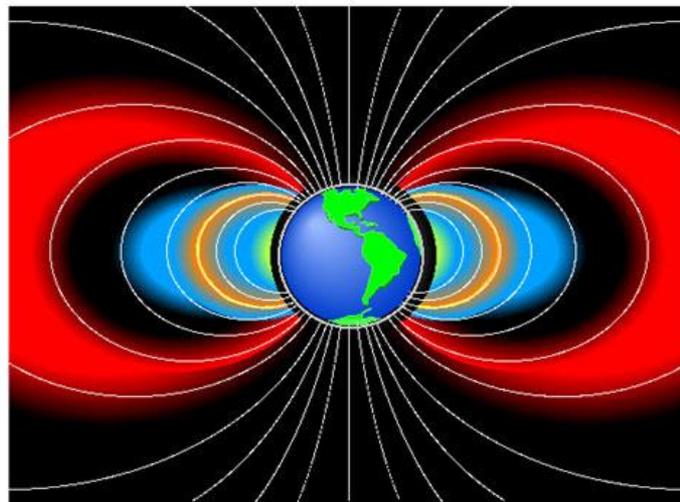


Quadrupol-Fokus

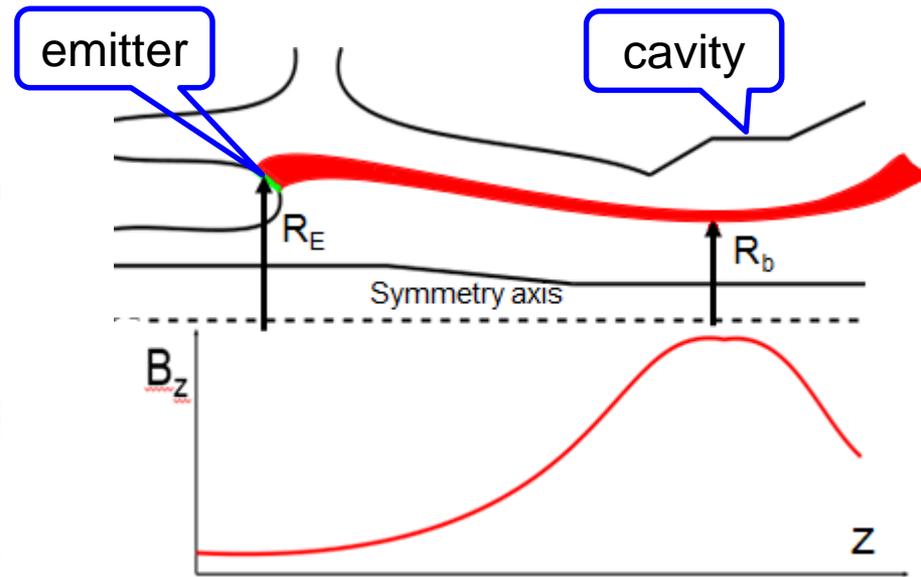
(Synchrotron Radiation Center, U.of Wisconsin)



# Busch Theorem: Relevant Examples



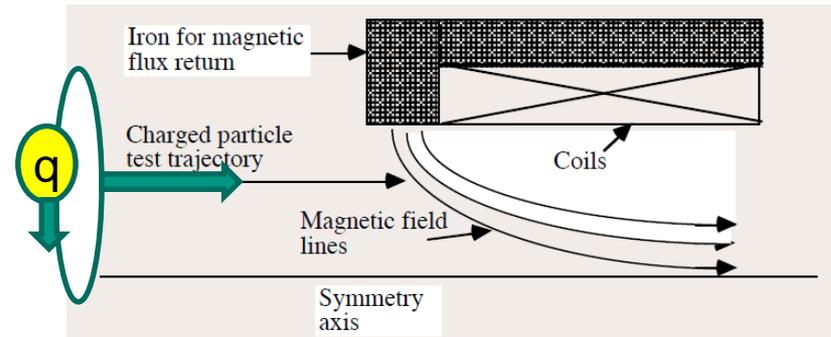
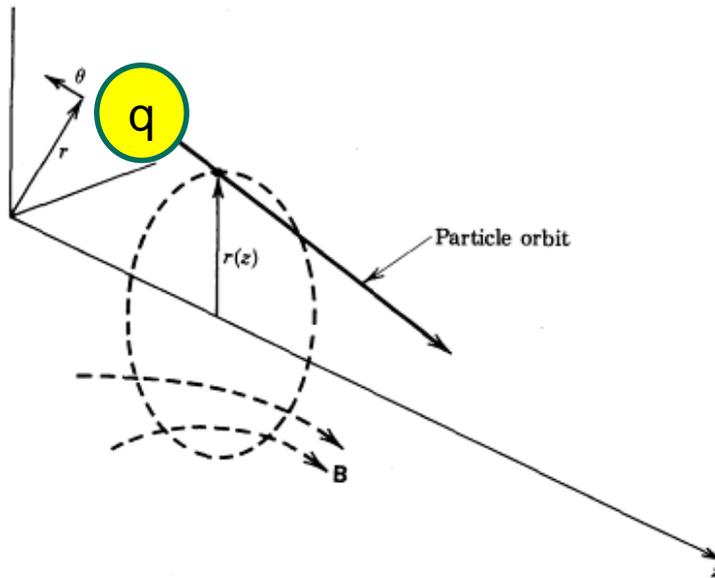
■ Outer Van Allen Belt      ■ Inner Van Allen Belt  
■ Trapped ACR (Interstellar matter)      ■ Energetic Secondary Ions



# Busch Theorem

**Starting point:** Consider a region of azimuthally symmetric, paraxial electric and magnetic fields where particles move almost parallel to the z-axis

**Statement:** The angular momentum of charged particles  $m \dot{\theta} r^2$  is directly related to the magnetic flux  $\psi$ . The **canonical** momentum is conserved in cylindrically symmetric **electric** and magnetic fields.



H. Busch, Z. Phys. **81**, 974 (1926)

# Busch Theorem: Derivation

## *Bewegung geladener Teilchen in axialsymmetrischen Feldern*

Bei der Strahlformierung und dem -transport in Elektronenkanonen und in Ionenquellen sind axialsymmetrische Geometrien am häufigsten vertreten. Daher wird die Bewegungsgleichung in Zylinderkoordinaten transformiert. In elektrischen und magnetischen Feldern ergibt sich die Bewegung

von geladenen Teilchen aus der Lorentzkraft:  $m \cdot \ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

In Zylinderkoordinaten:

$$m \cdot (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = q(E_r + r\dot{\theta} \cdot B_z - \dot{z} \cdot B_\theta)$$

$$m \cdot (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = q(E_\theta + \dot{z} \cdot B_r - \dot{r} \cdot B_z)$$

$$m \cdot \ddot{z} = q(E_z + \dot{r} \cdot B_\theta - r\dot{\theta} \cdot B_r)$$

In axialsymmetrischen Feldern:  $E_\theta = B_\theta = 0$ . Außerdem gilt:  $\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow m \cdot (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = q(\dot{z} \cdot B_r - \dot{r} \cdot B_z), \text{ wobei } m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} = r \cdot l$$

$l$  ist der Drehimpuls des Teilchens um die Strahlachse! Für das Vektorpotential bei einem axialsymmetrischen Magnetfeld muß gelten:

*Arbeitsgruppe Beschleunigerphysik: Prof. Dr. Oliver Kester, Institut für Angewandte Physik, Goethe Universität Frankfurt und GSI - Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung Darmstadt*

# Busch Theorem: Derivation

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad B_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A_r}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial r} \quad \forall A_r, A_z \quad \Rightarrow \quad A_r = A_z = 0$$

$$\vec{A} = (0, A_\theta, 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \left( -\frac{\partial A_\theta}{\partial z}, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right)$$

Eingesetzt in die obige Gleichung ergibt dies:

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{q}{m} \left( -r \cdot \dot{z} \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial z} - \dot{r} \cdot \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \right) = -\frac{q}{m} \left( \frac{d}{dt} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial t} (r A_\theta) \right)$$

da wir nur statische Fokussierfelder betrachten ist die partielle Ableitung nach der Zeit Null. Damit erhält man:

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta} + q \cdot r \cdot A_\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad m r^2 \dot{\theta} + q \cdot r \cdot A_\theta = \text{const.} = P_\theta$$

$P_\theta$  ist der generalisierte Impuls der  $\theta$ -Komponente. Für den magnetischen Fluss gilt:

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = \int_F \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{F} = \oint_{(F)} \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad \rightarrow \quad \Phi(r) = \int_0^{2\pi} r A_\theta d\theta = 2\pi r A_\theta$$

Damit nimmt der generalisierte Impuls die folgende Form an:

# Busch Theorem: Derivation

$$P_\theta = P_{\theta_0} = mr^2\dot{\theta} + \frac{q \cdot \Phi(r)}{2\pi} = \text{const.} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{r_0^2}{r^2} \dot{\theta}_0 + \frac{q}{2\pi \cdot m \cdot r^2} (\Phi_0(r_0) - \Phi(r))$$

Das ist das sogenannte **Busch-Theorem** (Drehimpulserhaltung)!

Für ein Solenoidfeld erhält man:  $B_z = \text{const} \rightarrow \Phi(r) = B_z \cdot \pi \cdot r^2$

Damit nimmt das Busch-Theorem die folgende Form an:

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{r_0^2}{r^2} \dot{\theta}_0 + \frac{q}{2m} \left( \frac{r_0^2}{r^2} B_{0z} - B_z \right)$$

Sind die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_0$  und das Magnetfeld  $B_{0z}$  am Startpunkt Null, dann ist  $\dot{\theta} = -\frac{q}{2m} B_z$

und damit identisch mit der Lamorfrequenz. Wenn also Teilchen aus einer feldfreien Zone in eine Magnetfeld eingeschossen werden, dann gyrieren diese mit der Lamorfrequenz  $\omega_L = \omega_c/2$ .

Damit lauten die Bewegungsgleichungen für  $\dot{\theta}_0 = 0$

$$m \cdot (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = q(E_r + r\dot{\theta} \cdot B_z), \quad \dot{\theta} = \frac{q}{2m} \left( \frac{r_0^2}{r^2} B_{0z} - B_z \right), \quad m \cdot \ddot{z} = q(E_z - r\dot{\theta} \cdot B_r)$$

# Busch Theorem: Derivation

Setzt man nun die mittlere Gleichung in die beiden anderen ein, so erhält man die **Randstrahlgleichung**

$$\ddot{r} = \frac{q}{m} E_r + \left( \frac{q}{2m} \right)^2 \frac{r_0^4 B_{0z}^2}{r^3} - \left( \frac{q}{2m} \right)^2 B_z^2 r$$

Der erste Term beschreibt den Kraftanteil der Raumladung, der zweite die Zentrifugalkraft oder magnetische Emittanz und der dritte Term beschreibt die Fokussierkraft des Magnetfeldes. Für die z-Abhängigkeit erhält man analog:

$$m \cdot \ddot{z} = q E_z - q r \frac{q}{2m} \left( \frac{r_0^2}{r^2} B_{0z} - B_z \right) \cdot B_r$$

Wenn man die Bewegung der Randstrahlteilchen in Abhängigkeit von z darstellen möchte, dann muss man die obigen Gleichungen kombinieren:

$$v_z^2 r'' + \left[ \frac{q}{m} E_z - \frac{q^2}{2m^2} r \left( \frac{r_0^2}{r^2} B_{0z} - B_z \right) B_r \right] \cdot r' = \frac{q}{m} E_r + \left( \frac{q}{2m} \right)^2 \frac{r_0^4 B_{0z}^2}{r^3} - \left( \frac{q}{2m} \right)^2 B_z^2 r$$

Die ist die **Paraxialgleichung**. Wenn  $E_z = 0$  und  $B_r \ll B_z$ , dann ist der Term in  $r'$  zu vernachlässigen.  $B_r$  sorgt für eine Änderung von  $v_z$  und damit von  $W_{kin||}$ . Damit wandelt also  $B_r$  kinetische Energie von

der longitudinalen Bewegung in die transversale, wie wir es beim magnetischen Spiegel schon kennen gelernt haben.

Die Paraxialgleichung mit Raumladung (betrifft nur  $E_r$ ) lautet daher:

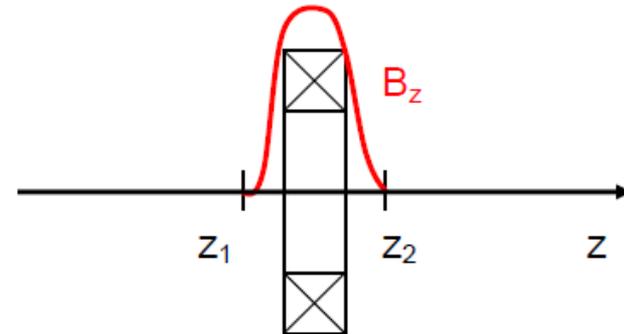
$$v_z^2 r'' + \left[ \frac{q}{m} E_z - \frac{q^2}{2m^2} r \left( \frac{r_0^2}{r^2} B_{0z} - B_z \right) B_r \right] \cdot r' = \frac{q}{m} \frac{I}{2\pi\epsilon_0 v_z r} + \left( \frac{q}{2m} \right)^2 \frac{r_0^4 B_{0z}^2}{r^3} - \left( \frac{q}{2m} \right)^2 B_z^2 r$$

Beispiele (ohne Raumladung):

### Magnetische Solenoidlinse

$$B_{0z} = E_z = 0$$

$$v_z^2 r'' + \left[ \frac{q^2}{2m^2} r B_z B_r \right] \cdot r' = \frac{q}{m} \frac{I}{2\pi\epsilon_0 v_z r} - \left( \frac{q}{2m} \right)^2 B_z^2 r$$



Im Integral von  $z_1$  bis  $z_2$  werden sich die Effekte von  $B_r$  weitgehend aufheben, da das Feld symmetrisch in  $z$  ist. Man kann nun die obige DGL numerisch mit Raumladung lösen oder ohne Raumladung analytisch behandeln:

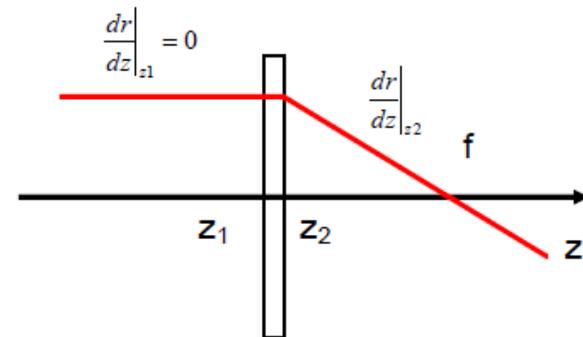
$$v_z^2 r'' + \left(\frac{q}{2m}\right)^2 B_z^2 r = 0 \Leftrightarrow r'' + k \cdot r = 0$$

### Hillsche Differentialgleichung

Dieser Typ von DGL bildet die Grundgleichung der linearen Strahloptik! Integration der Gleichung:

$$\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z_1}^{z_2} = -\left(\frac{q}{2m}\right)^2 \frac{1}{v_z^2} \int_{z_1}^{z_2} B_z^2 r dz \approx -\frac{q^2}{8m} \frac{r_0}{q \cdot U_{acc}} \int_{z_1}^{z_2} B_z^2 dz$$

Hier wurde eine dünne Linse angenommen. Daher bleibt der Strahlradius  $r_0$  in der Linse nahezu konstant. Für die Geschwindigkeit kann man noch die Beschleunigungsspannung



$U_{acc}$  einsetzen. Damit erhält man für die Fokallänge:

$$\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z_2} \approx \frac{r_0}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = -\frac{q^2}{8mq \cdot U_{acc}} \int_{z_1}^{z_2} B_z^2 dz$$

Mann nutzt in der linearen Strahloptik eine **effektive Feldlänge**  $z_L$  mit

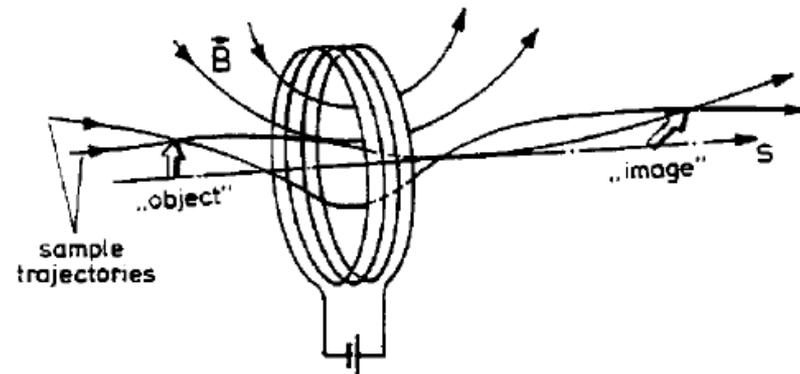
$$B_0^2 z_L = \int_{z_1}^{z_2} B_z^2 dz$$

Nun gyrieren geladene Teilchen im Soleniodfeld. Nach dem Busch Theorem ist  $\dot{\theta} = -\frac{q}{2m} B_z$ .

mit  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dz} v_z$  folgt dann für die Winkeländerung mit dem Ort:

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{q}{2m \cdot v_z} B_z = -\frac{q}{\sqrt{8mqU_{acc}}} B_z$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{q}{\sqrt{8mqU_{acc}}} \int_{z_1}^{z_2} B_z dz$$



Neben den radial wirkenden Kräften gibt es auch azimuthal wirkende Kräfte, die zu einer Winkeländerung in diese Richtung führen.

Figure 8: Particle trajectories and field lines in a “thin” lens formed by the solenoidal field of a coil (according to Bergmann/Schäfer: Optik)

Die Änderung des Winkels hängt vom Vorzeichen der Ladung und der Richtung des Magnetfeldes ab. Vorteile der Solenoidlinsen sind die Erhaltung der Raumladungskompensation und das Fehlen der sphärischen Abberation. Nachteile sind die Beschränkung auf niederenergetische Strahlen und die chromatische Abberation.

# Application in the gyrotron MIG design

- $B_z$  is the dominant component of magnetic field
- $\psi$  is approximated by the magnetic field strength  $B$  on the  $z$ -axis

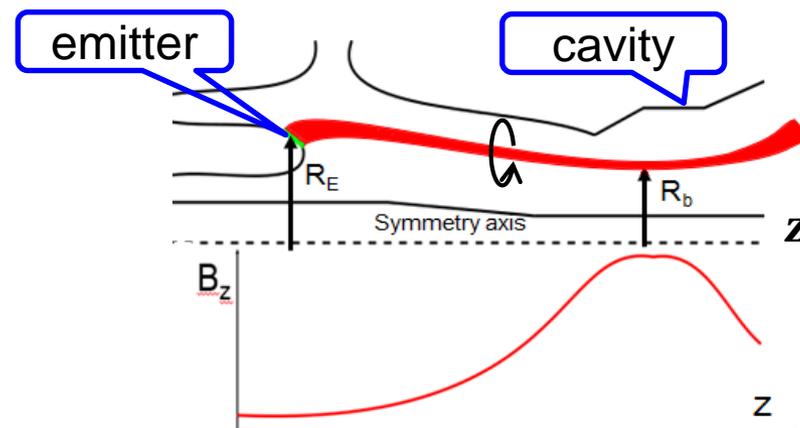
$$\psi(z) \approx \pi r^2 B(z)$$

- Initially,  $\dot{\theta} = 0$  on the emitter
- Electron beam radius  $R_b$  in the cavity depends on the emitter radius

$$R_b^2 B_{\text{cavity}} = R_E^2 B_{\text{emitter}}$$

- magnetic compression

$$b := \frac{B_R}{B_E}$$



# The Magnetic Mirror

Rotationally symmetric magnetic field configurations, with high magnetic field at the end.

Axial Magnetic Field: Charged particles have  $B$ -dependent helical trajectories.

$B$  influences the velocity ratio due to adiabatic invariance and energy conservation:

$$v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$$
$$v_{\parallel}^2(z) = v^2(0) - v_{\perp}^2(0) \cdot \frac{B(z)}{B(0)}$$

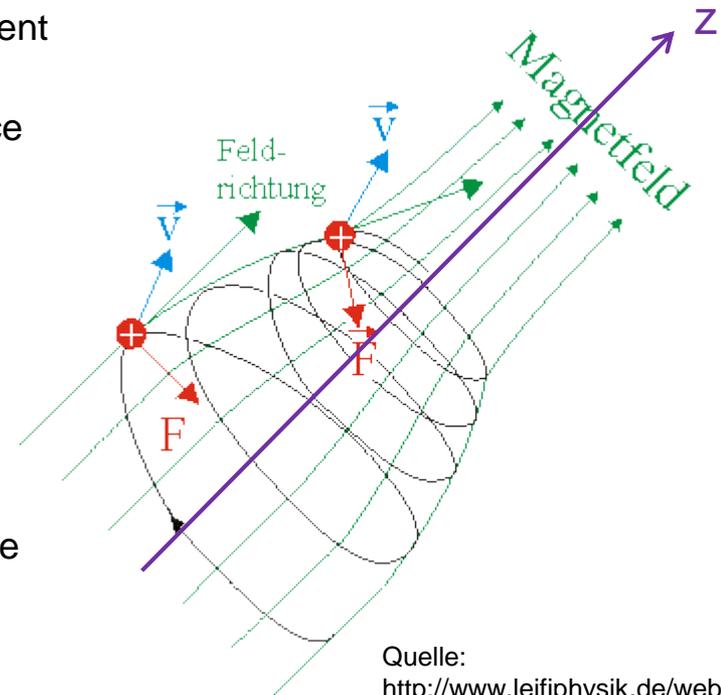
Drift in positive  $z$ -direction:

**$|B|$  increasing**

- kinetic energy is „transferred“ from axial to transverse direction
- Larmor-radius decreases, helical trajectories shrink

**$\vec{B}$  not parallel to  $\vec{v}_{\parallel}$**

- Lorentz force not perpendicular to drift direction, has component in negative  $z$ -direction
- **Acceleration against drift direction**
- **Reflection of particles at „Magnetic Mirror“**

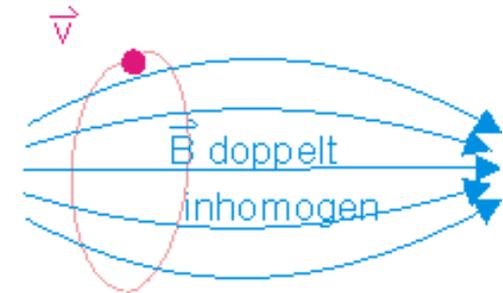


Quelle:  
[http://www.leifiphysik.de/web\\_ph11\\_g8/umwelt\\_technik/04magnetflasche/magn\\_flasche.htm](http://www.leifiphysik.de/web_ph11_g8/umwelt_technik/04magnetflasche/magn_flasche.htm)

# The Magnetic Bottle

## Combination of 2 Magnetic Mirrors:

→ Charged particles are reflected at both ends of the magnetic bottle, so that they can be confined.



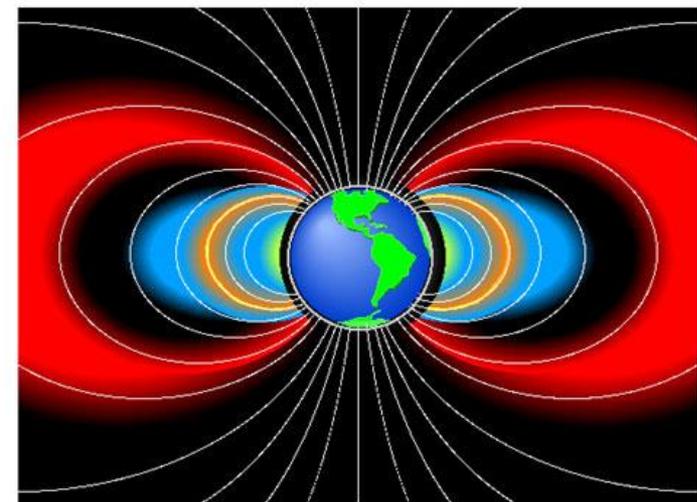
## Examples:

- Nuclear Fusion: Magnetic confinement in **Fusion Mirror Machines**

- Nature: **Van-Allen-Belt**

Magnetic field of earth forms a rotationally symmetric magnetic bottle; trapped particles oscillate between the poles and create several strong radiation belts:

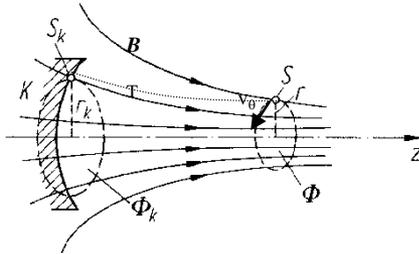
- inner: mainly: protons, alphas and ions  
height: 7,000-20,000 km  
min. height: 200 km (South Atlantic)
- outer: mainly: electrons, but also protons  
height: 13,000 – 60,000 km



■ Outer Van Allen Belt      ■ Inner Van Allen Belt  
■ Trapped ACR (Interstellar matter)      ■ Energetic Secondary Ions

SPP, U. Of Maryland

Geometrical scaling of microwave tubes is often appropriate when an approved existing design at a given frequency  $f_1$  has to be transferred to a new frequency  $f_2$ .



$$\gamma = \lambda_2 / \lambda_1 = f_1 / f_2$$

Not Lorentz-Factor!

Scaling with frequency

The Maxwell equations remain invariant in the scaled, new coordinate system  $x_2$  when the following scaling laws are applied:

$x_2 = \gamma \cdot x_1$	Linear geometrical scaling of all dimensions in $x_1$ with the factor $\gamma$ in the new coordinate system $x_2$
$E_2 = \gamma^{-1} \cdot E_1$	Electric field
$B_2 = \gamma^{-1} \cdot B_1$	Magnetic field
$\Phi_2 = \gamma^0 \cdot \Phi_1$	Electric potential
$A_2 = \gamma^0 \cdot A_1$	Vector potential
$j_2 = \gamma^{-2} \cdot j_1$	Current density
$I_2 = \gamma^0 \cdot I_1$	Total current (from electron gun)
$P_2 = \gamma^0 \cdot P_1$	Perveance $P = I \cdot V^{-3/2}$

With above scaling laws, we can easily understand why the power handling ability  $P_{out}$  of a given microwave tube design scales roughly with frequency  $f^2$  or  $P_{out} f^2 = \text{constant}$ .

